

Roll No.							
-----------------	--	--	--	--	--	--	--

24414-MN

**B.Sc. IV SEMESTER [MAIN/ATKT] EXAMINATION
JUNE - JULY 2024**

MATHEMATICS

[Abstract Algebra and Linear Algebra] [Minor Subject]

[Max. Marks : 60]

[Time : 3:00 Hrs.]

Note : All THREE Sections are compulsory. Student should not write any thing on question paper.
नोट : सभी तीन खण्ड अनिवार्य हैं। विद्यार्थी प्रश्न-पत्र पर कुछ न लिखें।

[Section - A]

This Section contains **Multiple Choice Questions**. Each question carries **1 Mark**. All questions are compulsory.

इस खण्ड में बहुविकल्पीय प्रश्न हैं। प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है। सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

Q. 01 The generator of cyclic group $\{1, w, w^2\}$ are -

चक्रीय समूह $\{1, w, w^2\}$ के जनक होंगे -

- a) $1, w$ b) w, w^2
 c) $1, w^2$ d) None of these

Q. 02 If यदि $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ then the value of $A \cdot B$. तो $A \cdot B$ का मान होगा

- a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Q. 03 Which of the ring is not an integral domain -

इनमें से कौन सा वलय पूर्णकीय प्रान्त नहीं है —

- a)** $(I, +, \cdot)$ **b)** $(Q, +, \cdot)$
c) $(R, +, \cdot)$ **d)** $(N, +, \cdot)$

Q. 04 Any set containing the single non zero vector is -

P.T.O.

एक समुच्चय जिसमें केवल एक अशून्य सदिश है, होगा —

Q. 05 The Eigen value of matrix A = $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\text{आव्यूह } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ के आइगन मान होंगे -}$$

[Section - B]

This Section contains **Short Answer Type Questions**. Attempt **any five** questions in this section in 200 words each. Each question carries **7 Marks**.

इस खण्ड में लघुउत्तरीय प्रश्न हैं। इस खण्ड में किन्हीं पांच प्रश्नों को हल करें। प्रत्येक उत्तर 200 शब्दों में लिखें। प्रत्येक प्रश्न 7 अंक का है।

Q. 01 State and Prove Lagrange's theorem.

लैन्ग्रांज प्रमेय का कथन लिखकर उसे सिद्ध कीजिये।

Q. 02 A homomorphism f of a group G into a group G' is a one-one if and only if $\text{Ker } f = \{e\}$

समूह G से समूह G' में समाकारिता f एक-एक होगा यदि और केवल यदि $\text{Ker } f = \{e\}$

Q. 03 Prove that the intersection of two subrings is a subring.

सिद्ध कीजिये कि दो उपवलयों का सर्वनिष्ठ भी एक उपवलय होता है।

Q. 04 A field is necessarily an integral domain.

सिद्ध कीजिये कि एक क्षैत्र, अनिवार्यतः पूर्णकीय प्रान्त होता है।

Q. 05 Prove that सिद्ध कीजिये –

- i) $a \cdot 0' = 0'$, $\forall a \in F$, $0' \in V$
 - ii) $a(-\alpha) = -a\alpha$, $\forall a \in F$, $\alpha \in V$

Cont. . .

Q. 06 If set $S = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ is a basis of $V_3(R)$ then show that the set

$$S^1 = \{\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha\} \text{ is also a basis set for } V_3(R)$$

यदि समुच्चय $S = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $V_3(R)$ का आधार समुच्चय हो तो दिखाइये कि समुच्चय $S^1 = \{\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha\}$ भी $V_3(R)$ का आधार समुच्चय होगा।

Q. 07 If the matrix of a linear transformation T on $V_2(C)$ with respect to the basis

$$B = \{(1, 0), (0, 1)\}$$
 then find the matrix of T with respect to the

ordered basis $B_1 = \{(1, 1), (1, -1)\}$

यदि $V_2(C)$ में रैखिक रूपान्तरण T का आधार $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$ के सापेक्ष आव्यूह $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ हो तो आधार $B_1 = \{(1, 1), (1, -1)\}$ के सापेक्ष T का आव्यूह ज्ञात कीजिये।

Q. 08 Show that the matrix $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ is diagonalizable.

दिखाइये कि आव्यूह $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ विकर्णीय है।

[Section - C]

This section contains **Essay Type Questions**. Attempt **any two** questions in this section in 500 words each. Each question carries **10 marks**.

इस खण्ड में दीर्घउत्तरीय प्रश्न हैं। इस खण्ड में किन्हीं दो प्रश्नों को हल करें। प्रत्येक उत्तर 500 शब्दों में लिखें। प्रत्येक प्रश्न **10** अंकों का है।

Q. 09 If H be a non - empty subset of a group G. Then H is a subgroup of G if and only if $a, b \in H \Rightarrow a \cdot b^{-1} \in H$

where b^{-1} is the inverse of b in G.

यदि H समूह G का एक असिक्त उपसमुच्चय हो तो H, समूह G का उपसमूह होगा

यदि और केवल यदि $a, b \in H \Rightarrow a \cdot b^{-1} \in H$

जहां b^{-1} , b का समूह G में प्रतिलोम है।

Q. 10 Prove that the $\lfloor n \rfloor$ permutations on n symbols, $\frac{n}{2}$ are even and $\frac{n}{2}$ are odd.

सिद्ध कीजिये कि n संकेतों के $\lfloor n \rfloor$ क्रमचय में से $\frac{n}{2}$ सम एवं $\frac{n}{2}$ विषम होते हैं।

Q. 11 Show that the set of complex numbers is not an ordered integral domain.

दिखाइये कि समिश्र संख्याओं का समुच्चय क्रमित पूर्णांकीय प्रान्त नहीं है।

Q. 12 If $V(F)$ is a finite dimensional vector space then prove that any two basis of $V(F)$ have the same number of elements.

यदि $V(F)$ एक परिमित विमीय सदिश समष्टि हो तो सिद्ध कीजिये कि $V(F)$ के किन्हीं दो आधार समुच्चयों में अवयवों की संख्या समान होती है।

